Zadanie 23. Rozwiąż równanie:

$$\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0.$$

W rozwiązaniach podobnych zadań często korzystamy ze wzorów trygonometrycznych z następujących dwóch grup. Po pierwsze mamy wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Po drugie, mamy wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Ze wzorów pierwszej grupy łatwo wynikają wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\\
\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =\\
&= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

Te wzory można uogólnić na większe wielokrotności kąta. Każdy wzór można zapisać na kilka sposobów; szczególnie przydatne jest wyrażenie funkcji trygonometrycznych wielokrotności kąta za pomocą funkcji sinus lub funkcji cosinus (tam, gdzie jest to możliwe). Najpierw wyprowadzimy wzory na funkcje potrojonego kąta:

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha =\\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =\\
&= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =\\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha(3-4\sin^2\alpha) = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1),\\
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha =\\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =\\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha =\\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) = \cos\alpha(1-4\sin^2\alpha).
\end{aligned}$$

Następnie wyprowadzimy wzory na $\sin 4\alpha$ i $\cos 4\alpha$:

$$\begin{aligned}
\sin 4\alpha &= \sin(2\cdot 2\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(1-2\sin^2\alpha) = \\
&= 4(\sin\alpha - 2\sin^3\alpha)\cos\alpha, \\
\cos 4\alpha &= \cos(2\cdot 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = (1-2\sin^2\alpha)^2 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = \\
&= 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \\
&= 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = \\
&= 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha) = 1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha.
\end{aligned}$$

Wreszcie potrzebny nam będzie wzór na $\sin 5\alpha$:

$$\begin{aligned}
\sin 5\alpha &= \sin(4\alpha+\alpha) = \sin 4\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 4\alpha = \\
&= 4(\sin\alpha - 2\sin^3\alpha)\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(1 - 8\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha) = \\
&= 4(\sin\alpha - 2\sin^3\alpha)\cos^2\alpha + \sin\alpha - 8\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha = \\
&= 4(\sin\alpha - 2\sin^3\alpha)(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 8\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha = \\
&= 4(\sin\alpha - \sin^3\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin^5\alpha) + \sin\alpha - 8\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha = \\
&= 4(\sin\alpha - 3\sin^3\alpha + 2\sin^5\alpha) + \sin\alpha - 8\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha = \\
&= 4\sin\alpha - 12\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha + \sin\alpha - 8\sin^3\alpha + 8\sin^5\alpha = \\
&= 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha.
\end{aligned}$$

Powszechnie znane są wartości funkcji trygonometrycznych dla kilku kątów: $30°$, $45°$ oraz $60°$. Korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów możemy obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kilku innych kątów. Na przykład:

$$\begin{aligned}
\sin 15° &= \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cos 30° - \sin 30°\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \\
\sin 75° &= \sin(45° + 30°) = \sin 45°\cos 30° + \sin 30°\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów redukcyjnych możemy też obliczyć:

$$\begin{aligned}
\sin 195° &= -\sin 15° = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\
\sin 255° &= -\sin 75° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Teraz przejdziemy do rozwiązywania równań trygonometrycznych. Zaczniemy od innego równania.

Zadanie 23a. Rozwiąż równanie:

$$\sin 5x - \sin 3x + \sin x = 0.$$

Rozwiązanie. Sposób I. Przekształcamy lewą stronę równania:

$$\sin 5x - \sin 3x + \sin x = (\sin 5x + \sin x) - \sin 3x = 2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} - \sin 3x =$$
$$= 2\sin 3x\cos 2x - \sin 3x = \sin 3x(2\cos 2x - 1).$$

Nasze równanie ma zatem postać równoważną

$$\sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0.$$

Możliwe są zatem dwa przypadki.
Przypadek 1. $\sin 3x = 0$.
Zatem $3x = n\cdot 180^\circ$ dla pewnej liczby całkowitej n. Stąd otrzymujemy pierwszą serię rozwiązań:

$$x = n\cdot 60^\circ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Te rozwiązania możemy zapisać także inaczej:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_2 &= 60^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_3 &= 120^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_4 &= 180^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_5 &= 240^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_6 &= 300^\circ + n\cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

Przypadek 2. $2\cos 2x - 1 = 0$.
Zatem $\cos 2x = \frac{1}{2}$, czyli $\cos 2x = \cos 60^\circ$. Stąd otrzymujemy następne dwie serie rozwiązań:

$$2x = 60^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 2x = 300^\circ + n\cdot 360^\circ,$$

czyli

$$x = 30^\circ + n\cdot 180^\circ \quad \text{lub} \quad x = 150^\circ + n\cdot 180^\circ.$$

Te rozwiązania można także zapisać inaczej:

$$\begin{aligned} x_7 &= 30^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_8 &= 210^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_9 &= 150^\circ + n\cdot 360^\circ,\\ x_{10} &= 330^\circ + n\cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

Zatem rozważane równanie ma w przedziale $\langle 0^\circ, 360^\circ)$ 10 rozwiązań:

$$0^\circ,\quad 30^\circ,\quad 60^\circ,\quad 120^\circ,\quad 150^\circ,\quad 180^\circ,\quad 210^\circ,\quad 240^\circ,\quad 300^\circ \quad \text{oraz} \quad 330^\circ.$$

Pozostałe rozwiązania różnią się od tych 10 rozwiązań o całkowitą wielokrotność 360°.

Rozwiązanie. Sposób II. Skorzystamy ze wzorów wyprowadzonych na początku tego tekstu. Nasze równanie ma postać równoważną:

$$(5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x) - (3\sin x - 4\sin^3 x) + \sin x = 0,$$

czyli

$$16\sin^5 x - 16\sin^3 x + 3\sin x = 0.$$

Podstawmy $t = \sin x$. Otrzymujemy następujące równanie piątego stopnia:

$$16t^5 - 16t^3 + 3t = 0,$$

czyli

$$t(16t^4 - 16t^2 + 3) = 0.$$

Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. $t = 0$, czyli $\sin x = 0$.

Zatem $x = n \cdot 180°$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Te rozwiązania możemy zapisać inaczej:

$$x_1 = 0° + n \cdot 360°,$$
$$x_2 = 180° + n \cdot 360°.$$

Przypadek 2. $16t^4 - 16t^2 + 3 = 0$.

Otrzymaliśmy równanie dwukwadratowe. Podstawiamy $u = t^2$:

$$16u^2 - 16u + 3 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu po lewej stronie:

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 3 = 16 \cdot (16 - 12) = 16 \cdot 4 = 64.$$

Zatem

$$u_1 = \frac{16-8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{oraz} \quad u_2 = \frac{16+8}{32} = \frac{3}{4}.$$

Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania równania:

$$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad t_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mamy zatem osiem rozwiązań równania trygonometrycznego:

- $\sin x = -\frac{1}{2}$, czyli $\sin x = \sin(-30°)$. Wówczas

$$x_3 = 210° + n \cdot 360°,$$
$$x_4 = 330° + n \cdot 360°.$$

- $\sin x = \frac{1}{2}$, czyli $\sin x = \sin 30°$. Wówczas

$$x_5 = 30° + n \cdot 360°,$$
$$x_6 = 150° + n \cdot 360°.$$

- $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $\sin x = \sin(-60^\circ)$. Wówczas

$$x_7 = 240^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_8 = 300^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $\sin x = \sin 60^\circ$. Wówczas

$$x_9 = 60^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_{10} = 120^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Zatem rozważane równanie ma w przedziale $\langle 0^\circ, 360^\circ)$ 10 rozwiązań:

$$0^\circ, \quad 30^\circ, \quad 60^\circ, \quad 120^\circ, \quad 150^\circ, \quad 180^\circ, \quad 210^\circ, \quad 240^\circ, \quad 300^\circ \quad \text{oraz} \quad 330^\circ.$$

Pozostałe rozwiązania różnią się od tych 10 rozwiązań o całkowitą wielokrotność 360°.

Zadanie 23b. Rozwiąż równanie:

$$\sin 5x - \sin 3x - \sin x = 0.$$

Rozwiązanie. Sposób I. Przekształcamy lewą stronę równania:

$$\sin 5x - \sin 3x - \sin x = (\sin 5x - \sin 3x) - \sin x = 2 \sin \frac{5x - 3x}{2} \cos \frac{5x + 3x}{2} - \sin x =$$
$$= 2 \sin x \cos 4x - \sin x = \sin x (2 \cos 4x - 1).$$

Nasze równanie ma zatem postać równoważną

$$\sin x (2 \cos 4x - 1) = 0.$$

Możliwe są zatem dwa przypadki.

Przypadek 1. $\sin x = 0$.
Zatem $x = n \cdot 180^\circ$ dla pewnej liczby całkowitej n. Te rozwiązania możemy zapisać także inaczej:

$$x_1 = 0^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_2 = 180^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Przypadek 2. $2 \cos 4x - 1 = 0$.
Zatem $\cos 4x = \frac{1}{2}$, czyli $\cos 4x = \cos 60^\circ$. Stąd otrzymujemy następne dwie serie rozwiązań:

$$4x = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 4x = 300^\circ + n \cdot 360^\circ,$$

czyli

$$x = 15^\circ + n \cdot 90^\circ \quad \text{lub} \quad x = 75^\circ + n \cdot 90^\circ.$$

Te rozwiązania można także zapisać inaczej:

$$\begin{aligned} x_3 &= 15^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_4 &= 105^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_5 &= 195^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_6 &= 285^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_7 &= 75^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_8 &= 165^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_9 &= 255^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_{10} &= 345^\circ + n \cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

Zatem rozważane równanie ma w przedziale $\langle 0^\circ, 360^\circ)$ 10 rozwiązań:

$$0^\circ, \quad 15^\circ, \quad 75^\circ, \quad 105^\circ, \quad 165^\circ, \quad 180^\circ, \quad 195^\circ, \quad 255^\circ, \quad 285^\circ \quad \text{oraz} \quad 345^\circ.$$

Pozostałe rozwiązania różnią się od tych 10 rozwiązań o całkowitą wielokrotność 360°.

Rozwiązanie. Sposób II. Skorzystamy ze wzorów wyprowadzonych na początku tego tekstu. Nasze równanie ma postać równoważną:

$$(5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x) - (3\sin x - 4\sin^3 x) - \sin x = 0,$$

czyli

$$16\sin^5 x - 16\sin^3 x + \sin x = 0.$$

Podstawmy $t = \sin x$. Otrzymujemy następujące równanie piątego stopnia:

$$16t^5 - 16t^3 + t = 0,$$

czyli

$$t(16t^4 - 16t^2 + 1) = 0.$$

Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. $t = 0$, czyli $\sin x = 0$.
Zatem $x = n \cdot 180^\circ$, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Te rozwiązania możemy zapisać inaczej:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0^\circ + n \cdot 360^\circ,\\ x_2 &= 180^\circ + n \cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

Przypadek 2. $16t^4 - 16t^2 + 1 = 0$.
Otrzymaliśmy równanie dwukwadratowe. Podstawiamy $u = t^2$:

$$16u^2 - 16u + 1 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu po lewej stronie:

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 16 = 16 \cdot (16 - 4) = 16 \cdot 12 = 192.$$

Zatem $\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{3}$ i stąd

$$u_1 = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{32} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \quad \text{oraz} \quad u_2 = \frac{16 + 8\sqrt{3}}{32} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Teraz zauważamy, że

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{8} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}$$

i podobnie

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{8}.$$

Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania równania:

$$t_1 = -\sqrt{u_1} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$t_2 = \sqrt{u_1} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$t_3 = -\sqrt{u_2} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$t_4 = \sqrt{u_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Mamy zatem osiem rozwiązań równania trygonometrycznego:

- $\sin x = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, czyli $\sin x = \sin(-15^\circ)$. Wówczas

$$x_3 = 195^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_4 = 345^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

- $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, czyli $\sin x = \sin 15^\circ$. Wówczas

$$x_5 = 15^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_6 = 165^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

- $\sin x = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, czyli $\sin x = \sin(-75^\circ)$. Wówczas

$$x_7 = 255^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_8 = 285^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

- $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, czyli $\sin x = \sin 75^\circ$. Wówczas

$$x_9 = 75^\circ + n \cdot 360^\circ,$$
$$x_{10} = 105^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Zatem rozważane równanie ma w przedziale $\langle 0^\circ, 360^\circ)$ 10 rozwiązań:

$$0^\circ, \quad 15^\circ, \quad 75^\circ, \quad 105^\circ, \quad 165^\circ, \quad 180^\circ, \quad 195^\circ, \quad 255^\circ, \quad 285^\circ \quad \text{oraz} \quad 345^\circ.$$

Pozostałe rozwiązania różnią się od tych 10 rozwiązań o całkowitą wielokrotność 360°.

Zauważmy, że pierwszy sposób rozwiązania obu równań nie różnił się istotnie. Drugi sposób rozwiązania w równaniu 23b prowadził do bardziej skomplikowanego równania wielomianowego i wymagał znajomości wartości funkcji sinus dla kątów 15° i 75°. Przejdźmy teraz do rozwiązania równania z zadania 23. Okaże się, że sposób drugi prowadzi do jeszcze większych komplikacji.

Rozwiązanie. Sposób I. Przekształcamy lewą stronę równania:

$$\sin 5x - \cos 2x + \sin x = (\sin 5x + \sin x) - \cos 2x = 2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} - \cos 2x =$$
$$= 2\sin 3x\cos 2x - \cos 2x = \cos 2x(2\sin 3x - 1).$$

Nasze równanie ma zatem postać równoważną

$$\cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0.$$

Możliwe są zatem dwa przypadki.

Przypadek 1. $\cos 2x = 0$.
Zatem $2x = 90^\circ + n\cdot 180^\circ$ dla pewnej liczby całkowitej n. Stąd otrzymujemy pierwszą serię rozwiązań:

$$x = 45^\circ + n\cdot 90^\circ,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Te rozwiązania możemy zapisać także inaczej:

$$x_1 = 45^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_2 = 135^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_3 = 225^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_4 = 315^\circ + n\cdot 360^\circ.$$

Przypadek 2. $2\sin 3x - 1 = 0$.
Zatem $\sin 3x = \frac{1}{2}$, czyli $\sin 3x = \cos 30^\circ$. Stąd otrzymujemy następne dwie serie rozwiązań:

$$3x = 30^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \text{lub} \quad 3x = 150^\circ + n\cdot 360^\circ,$$

czyli

$$x = 10^\circ + n\cdot 120^\circ \quad \text{lub} \quad x = 50^\circ + n\cdot 120^\circ.$$

Te rozwiązania można także zapisać inaczej:

$$x_5 = 10^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_6 = 130^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_7 = 250^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_8 = 50^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_9 = 170^\circ + n\cdot 360^\circ,$$
$$x_{10} = 290^\circ + n\cdot 360^\circ.$$

Zatem rozważane równanie ma w przedziale $\langle 0^\circ, 360^\circ)$ 10 rozwiązań:

$$10^\circ,\quad 45^\circ,\quad 50^\circ,\quad 130^\circ,\quad 135^\circ,\quad 170^\circ,\quad 225^\circ,\quad 250^\circ,\quad 290^\circ \quad \text{oraz} \quad 315^\circ.$$

Pozostałe rozwiązania różnią się od tych 10 rozwiązań o całkowitą wielokrotność 360°.

Rozwiązanie. Sposób II. Skorzystamy ze wzorów wyprowadzonych na początku tego tekstu. Nasze równanie ma postać równoważną:

$$(5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x) - (1 - 2\sin^2 x) + \sin x = 0,$$

czyli

$$16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 2\sin^2 x + 6\sin x - 1 = 0.$$

Podstawmy $t = \sin x$. Otrzymujemy następujące równanie piątego stopnia:

$$16t^5 - 20t^3 + 2t^2 + 6t - 1 = 0.$$

Przekształćmy to równanie w sposób równoważny:

$$\begin{gathered} 16t^5 - 8t^3 - 12t^3 + 6t + 2t^2 - 1 = 0, \\ 8t^3(2t^2 - 1) - 6t(2t^2 - 1) + (2t^2 - 1) = 0, \\ (2t^2 - 1)(8t^3 - 6t + 1) = 0. \end{gathered}$$

Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. $2t^2 - 1 = 0$, czyli $t^2 = \frac{1}{2}$.
Zatem

$$t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lub} \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

czyli

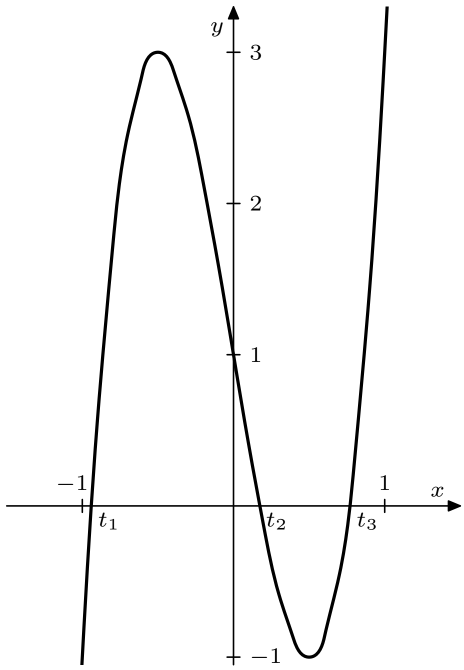
$$\sin x = \sin(-45^\circ) \quad \text{lub} \quad \sin x = \sin 45^\circ.$$

Stąd otrzymujemy cztery serie rozwiązań:

$$\begin{aligned} x_1 &= 45^\circ + n \cdot 360^\circ, \\ x_2 &= 135^\circ + n \cdot 360^\circ, \\ x_3 &= 225^\circ + n \cdot 360^\circ, \\ x_4 &= 315^\circ + n \cdot 360^\circ. \end{aligned}$$

Przypadek 2. $8t^3 - 6t + 1 = 0$.
Otrzymaliśmy równanie trzeciego stopnia, które nie ma rozwiązań wymiernych (co można łatwo sprawdzić). Popatrzmy najpierw na wykres wielomianu stojącego po lewej stronie równania. Zauważamy, że ten wielomian ma trzy pierwiastki rzeczywiste (a więc nie ma także dobrych wzorów na pierwiastki tego wielomianu). Będziemy mogli jednak domyślić się, jakie liczby są tymi pierwiastkami. Będziemy szukać wśród sinusów

znanych kątów.



Przybliżone wartości tych pierwiastków są równe:

$$t_1 \approx -0{,}939692, \quad t_2 \approx 0{,}173468 \quad \text{oraz} \quad t_3 \approx 0{,}766044.$$

Można się przekonać, że są to też przybliżone wartości trzech sinusów:

$$\sin(-70^\circ) \approx -0{,}939692, \quad \sin 10^\circ \approx 0{,}173468 \quad \text{oraz} \quad \sin 50^\circ \approx 0{,}766044.$$

Można się przekonać, że te trzy sinusy rzeczywiście są pierwiastkami rozważanego wielomianu. Zauważmy bowiem, że

$$8t^3 - 6t = -2(3t - 4t^3) = -2(3\sin x - 4\sin^3 x) = -2\sin 3x.$$

Zatem

$$\begin{aligned} 8\sin^3(-70^\circ) - 6\sin(-70^\circ) + 1 &= -2\sin(-210^\circ) + 1 = 2\sin 210^\circ + 1 = \\ &= -2\sin 30^\circ + 1 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = -1 + 1 = 0, \\ 8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1 &= -2\sin 30^\circ + 1 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = -1 + 1 = 0, \\ 8\sin^3 50^\circ - 6\sin 50^\circ + 1 &= -2\sin 150^\circ + 1 = -2\sin 30^\circ + 1 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \\ &= -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Zatem rzeczywiście

$$t_1 = \sin(-70^\circ), \quad t_2 = \sin 10^\circ \quad \text{oraz} \quad t_3 = \sin 50^\circ.$$

Stąd dostajemy sześć serii rozwiązań.

- $\sin x = \sin(-70°)$. Wówczas
$$x_5 = 250° + n \cdot 360°,$$
$$x_6 = 290° + n \cdot 360°.$$
- $\sin x = \sin 10°$. Wówczas
$$x_7 = 10° + n \cdot 360°,$$
$$x_8 = 170° + n \cdot 360°.$$
- $\sin x = \sin 50°$. Wówczas
$$x_9 = 50° + n \cdot 360°,$$
$$x_{10} = 130° + n \cdot 360°.$$

Zatem rozważane równanie ma w przedziale $\langle 0°, 360°)$ 10 rozwiązań:

$$10°,\quad 45°,\quad 50°,\quad 130°,\quad 135°,\quad 170°,\quad 225°,\quad 250°,\quad 290°\quad \text{oraz}\quad 315°.$$

Pozostałe rozwiązania różnią się od tych 10 rozwiązań o całkowitą wielokrotność 360°.

Uwaga. Na zakończenie zauważmy, że liczba $\sin 10°$ jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia, który nie ma pierwiastków wymiernych. Stąd wynika, że odcinek długości $\sin 10°$ nie jest konstruowalny za pomocą cyrkla i linijki. A więc kąta 10° także nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.